ÀLGEBRES D'INVARIANTS I ÀLGEBRES DE POLINOMIS SOBRE L'ÀLGEBRA DE STEENROD*

per

CARLES BROTO I BLANCO

Secció de Matemàtiques, Facultat de Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona.

SUMMARY

We are interested in the classification of unstable algebras over the Steenrod algebra which are polynomial algebras on even dimensional generators over the field of p elements (p an odd prime). We have to distinguish between the modular case: $\mathbb{F}_p[x_1, \ldots x_n]$, deg $x_i = 2d_i$ with $d_1 \ldots d_n \equiv 0 \pmod p$; and the non modular case $d_1 \ldots d_n \not\equiv 0 \pmod p$.

Invariant theory has played an important role in this question. We explain how it allowed to solve the problem in the non modular case [2], [13].

In modular case the problem is still open because we don't dispose a good characterization of groups with modular polynomial invariants. Here, we calculate the invariant algebras by the action of the groups:

$$SL_n^r(\mathbb{F}_p) = \left\{ \omega \in GL_n(\mathbb{F}_p) : \det(\omega)^r = 1 \right\}, \ r \mid p\text{-}1;$$

$$G(r_1, \ldots, r_n) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{F}_p) : \lambda_1^{r_1} = \ldots = \lambda_n^{r_n} = 1 \right\}, \ r_i \mid p\text{-}1$$

This family extends the cases $GL_n(\mathbb{F}_p)$, $SL_n(\mathbb{F}_p)$ and $Up(n)$, (Unitriangular matrices) whose invariants were known. These algebras are

* Aquest treball és un resum de la Memòria presentada per tal d'optar al grau de llicenciatura de Matemàtiques, dirigida pel Dr. Jaume Aguadé.

polynomial and we can find explicitly the induced Steenrod a algebra action. Finally we consider realizability of these algebras as cohomology rings.

INTRODUCCIÓ

Donat un espai topològic X i un anell commutatiu *R*, l'àlgebra de cohomologia de X amb coeficients a *R*: $H^*(X;R)$, és una àlgebra sobre R, graduada, commutativa (en sentit graduat) i unitària.

El problema de la realitzabilitat consisteix a esbrinar quines àlgebres graduades commutatives i unitàries poden aparèixer com a àlgebres de cohomologia d'un espai topològic. Aquest problema, en general, resulta ben difícil i fou explícitament enunciat per N. E. Steenrod l'any 1960[30].

Aquest treball està dedicat a l'estudi del problema de la realitzabilitat en el cas d'àlgebres de polinomis amb un nombre finit de generadors de grau parell sobre el cos finit de p elements, amb p un primer senar. Aquest cas ha estat molt estudiat ja que, d'una banda està relacionat amb l'estudi dels espais classificadors, els quals tenen cohomologia mod p polinòmica molt sovint, i d'altra banda la simplicitat d'aquestes àlgebres i l'existència de l'àlgebra de Steenrod mod p, $\mathcal{A}_p^*$, que actua sobre la cohomologia mod p dels espais topològics, han convertit aquest problema en un tema ben interessant.

L'any 1960 N. E. Steenrod ja posava de manifest que una condició necessària que ha de complir una àlgebra de polinomis:

$$\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]; \quad \deg x_i = 2d_i$$

per a ésser l'àlgebra de cohomologia d'un espai és admetre una acció inestable de l'àlgebra de Steenrod i d'aquesta manera és possible d'obtenir restriccions sobre el tipus $(2d_1, \ldots, 2d_n)$ de l'àlgebra de polinomis.

La teoria d'invariants hauria de proporcionar nous exemples d'àlgebres de polinomis sobre l'àlgebra de Steenrod a part dels exemples que provenen de cohomologies conegudes. Efectivament, si V és un espai vectorial de dimensió n sobre $\mathbb{F}_p$ i G és un subgrup del grup lineal $GL_n(\mathbb{F}_p)$, aleshores G actua sobre l'àlgebra simètrica P(V), la qual és isomorfa a l'àlgebra de cohomologia mod p de l'espai d'Eilenberg-MacLane $K(Z^n,2)$ i aleshores, l'àlgebra d'invariants hereda una acció de l'àlgebra de Steenrod.

Si $P(V)^G$ és una àlgebra de polinomis $\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$, $\deg x_i = 2d_i$, assignant el grau 2 als elements de V, es compleix que el cardinal de G és igual al producte $d_1 d_2 \ldots d_n$. Hi distinguirem dos casos:

1) Cas modular : Card (G) = $d_1 \cdots d_n \equiv 0 \pmod p$.
2) Cas no modular : Card (G) = $d_1 \cdots d_n \not\equiv 0 \pmod p$.

L'any 1972, Clark-Ewing utilitzaren els resultats sobre teoria d'invariants de Shephard-Todd[25], C. Chevalley[15], N. Bourbaki[11], i van donar una classificació completa de les àlgebres d'invariants que són àlgebres de polinomis no modulars, classificació coneguda amb el nom de llista de Clark-Ewing. A més a més construïren espais topològics realitzant aquestes àlgebres[13].

L'any 1978 J. F. Adams i C. W. Wilkerson demostraren que aquests són tots els exemples d'àlgebres de polinomis no modulars que admeten una acció inestable de l'àlgebra de Steenrod i per tant les úniques realitzables.

En el cas modular, la situació ha resultat ben diferent. En primer lloc hom no disposa de cap mena de classificació d'àlgebres d'invariants polinòmiques modulars. A més a més, entre els exemples que hom coneix només algun cas aïllat és realitzable.

Els exemples coneguts més importants d'àlgebres d'invariants modulars són: l'àlgebra de Dickson, que és l'àlgebra d'invariants per la totalitat del grup lineal $GL_n(\mathbb{F}_p)$, els invariants per l'acció del grup especial lineal $SL_n(\mathbb{F}_p)$, i el grup simètric Σ_n. A més a més hi ha una classificació dels p-grups que tenen invariants polinòmics[24]. Entre aquests hi ha el grup de les matrius triangulars amb uns a la diagonal, Up(n).

En aquest treball hem calculat les àlgebres d'invariants per l'acció de noves famílies de grups que contenen alguns dels citats abans:

(i) $SL_n^r(\mathbb{F}_p) = \left\{ w \in GL_n(\mathbb{F}_p) : \det(w)^r = 1 \right\}$, $r \mid p-1$.

(ii) $G(r_1, \ldots, r_n) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in GL_n(F_p) : \lambda_1^{r_1} = \ldots = \lambda_n^{r_n} = 1 \right\}$, $r_i \mid p-1$.

En el primer capítol farem un estudi dels resultats bàsics de la teoria d'invariants i dels resultats de Clark-Ewing i d'Adams-Wilkerson.

En el capítol 2 considerarem l'estructura de l'àlgebra de Dickson i l'acció de les operacions de Steenrod sobre aquesta àlgebra.

En el capítol 3 calculem els invariants per l'acció dels grups SL_n^r i $G(r_1, \ldots, r_n)$ mentre que l'acció de les operacions de Steenrod sobre aquestes àlgebres és determinada al capítol 4.

Finalment en el capítol 5 considerem la realitzabilitat de les àlgebres $P(V)^{SL_n^r}$ i $P(V)^{G(r_1 \cdots r_n)}$. Donem també la construcció de Clark-Ewing d'espais realitzant les àlgebres de polinomis no modulars.

Cal recordar que espai voldrà dir espai topològic arc-connex del tipus d'homotopia d'un CW-complex i que, llevat que hom digui el contrari, els nombres primers són nombres primers senars.

1. ÀLGEBRES DE POLINOMIS SOBRE L'ÀLGEBRA DE STEENROD

En aquest capítol donarem una breu descripció de l'àlgebra de Steenrod, així com dels resultats algèbrics més importants que permeteren d'obtenir una classificació de les àlgebres de polinomis, $\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$, deg $x_i = 2d_i$, $d_i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, amb p un primer senar, que admeten una acció inestable de l'àlgebra de Steenrod.

L'àlgebra de Steenrod

Es defineix, per a cada primer p, l'àlgebra de Steenrod mod p, $\mathcal{A}_p^*$, com la $\mathbb{F}_p$-àlgebra graduada de totes les operacions estables de cohomologia:

$$\theta : H^*(-, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(-, \mathbb{F}_p)$$

([4], [33])

Aquesta àlgebra fou estudiada principalmente per Steenrod, Adem, Cartan i Serre. La referència estàndard és [32].

Si p és un primer senar, l'àlgebra de Steenrod mod p és una àlgebra de Hopf graduada, connexa, coassociativa i cocommutativa, generada per les operacions:

$$\mathcal{P}^i : H^k(-, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^{k+2i(p-1)}(-, \mathbb{F}_p) \quad , \quad k = 0,1,2, \ldots$$

per cada $i \geqslant 0$, juntament amb l'operador Bockstein, β, associat a la successió:

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$$

Aquestes operacions satisfan les propietats:

1) $\mathcal{P}^1$ és un morfisme de $\mathbb{F}_p$-espais vectorials graduats, de grau $2i(p-1)$ i β és una derivació de $\mathbb{F}_p$-àlgebres graduades de grau 1.
2) $\mathcal{P}^o = 1$.
3) Si deg $x = 2k$, $\mathcal{P}^k(x) = x^p$.
4) Si deg $x < 2k$, $\mathcal{P}^k(x) = 0$.
5) Fórmula de Cartan: $\mathcal{P}^k(x \cdot y) = \sum_{i=o}^{k} \mathcal{P}^i(x)\ \mathcal{P}^{k-i}(y)$.
6) Relacions d'Adem:

$$0 < a < pb, \ \mathcal{P}^a\ \mathcal{P}^b = \sum_{t=o}^{[a/p]} (-1)^{a+t} \binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt} \mathcal{P}^{a+b-t}\ \mathcal{P}^t$$

$$0 < a \leqslant pb,\ \mathcal{P}^{a}\beta\ \mathcal{P}^{b} = \sum_{t=o}^{[a/p]} (-1)^{a+t}\binom{(p-1)(b-t)}{a-pt}\beta\ \mathcal{P}^{a+b-t}\ \mathcal{P}^{t} +$$
$$+ \sum_{t=o}^{[\frac{a-1}{p}]} (-1)^{a+t-1}\binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt-1}\ \mathcal{P}^{a+b-t}\beta\ \mathcal{P}^{t}$$

7) $\beta^2 = 0$.

La diagonal d'aquesta àlgebra de Hopf es l'únic homomorfisme d'àlgebres graduades:

$$\psi^* : \mathcal{a}_p^* \longrightarrow \mathcal{a}_p^* \otimes \mathcal{a}_p^*$$

que extén l'aplicació: $\psi^*(\beta) = \beta \otimes 1 + 1 \otimes \beta$, $\psi^*(\mathcal{P}^k) = \sum_{i=o}^{k} \mathcal{P}^{k-i} \otimes \mathcal{P}^i$.

Així, l'àlgebra de cohomologia mod p de qualsevol espai té estructura d'àlgebra sobre l'àlgebra de Steenrod. Satisfà, a més a més, les condicions (3) i (4) anomenades d'inestabilitat.

Nosaltres estem interessats en la classificació de les àlgebres de polinomis, nul·les en graus senars, que admeten una acció inestable de l'àlgebra de Steenrod, com a primer pas per a trobar les àlgebres de polinomis que poden aparèixer com a anell de cohomologia d'un espai.

Per raons de grau, $\beta = 0$ sobre aquestes àlgebres, i per tant només caldrà considerar la subàlgebra generada pels operadors $\mathcal{P}^i$, $i \geqslant 0$, la qual denotarem $\mathcal{A}_p^*$.

Utilitzant les relacions d'Adem és possible de demostrar que els operadors:

$$\{\mathcal{P}^{p^i}; i \geqslant 0\}$$

generen $\mathcal{A}_p^*$ com $\mathbb{F}_p$ –àlgebra.

Ha estat de gran utilitat l'estudi fet per Milnor[21] de l'àlgebra de Hopf dual de l'àlgebra de Steenrod. En particular, Milnor definí els elements $Q^1 = \mathcal{P}^1$, $Q^{j+i} = [\mathcal{P}^{f^j}, Q^j]$ on $[\theta_1, \theta_2] := \theta_1\ \theta_2 - \theta_2\ \theta_1$. demostrant que són primitius a $\mathcal{A}_p^*$ i per tant actuen com a derivacions sobre les $\mathcal{A}_p^*$ –àlgebres.

Exemple:

Suposem que un espai X té cohomologia $H^*(X, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[x]$; deg $x = 2n$. Aleshores $\mathbb{F}_p[x]$ admet una acció inestable de l'àlgebra de Steenrod, $\mathcal{A}_p^*$, i d'aquesta manera és fàcil d'obtenir restriccions sobre el grau del generador x : $\mathcal{P}^n(x) = x^p \neq 0$, per inestabilitat i com que els operadors $\mathcal{P}^{p^j}$, $j \geqslant 0$ generen $\mathcal{A}_p^*$, hi ha algun $j \geqslant 0$, amb $p^j \leqslant n$ tal que

$\mathcal{P}^{p^j} x \neq 0$; però $\mathbb{F}_p[x]$ només és diferent de zero en graus múltiples de 2n. Aleshores, hi ha $s \in \mathbb{N}$:

$$2p^j(p-1) + 2n = \deg \mathcal{P}^{p^j} x = 2ns$$

és a dir, $n(s-1) = p^j(p-1)$; i com que $p^j \leqslant n$, obtenim $n = p^j m$ amb m un divisor de p-1.

Ara bé, degut a l'existència de les relacions d'Adem, pot ésser un problema ben difícil d'esbrinar si una àlgebra en particular admet una $\mathcal{A}_p^*$ acció inestable. Podem veure per exemple [31] on Steenrod demostra que $\mathbb{F}_p[x_4, y_{2(p-1)}]$ admet una única acció inestable de $\mathcal{A}_p^*$. En el cas p = 3, aquesta és la cohomologia de BSp(2) però si p > 3 representava el primer exemple no trivial que no provenia de la cohomologia d'un espai.

Àlgebres d'invariants

Considerem un grup finit G i una representació fidel:

$$\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{F}_p)$$

i assignem el grau 2 als vectors de l'espai de representació:
$V \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{F}_p \cdot t_i$. L'acció de G sobre V indueix una acció sobre l'àlgebra simètrica de V:

$$P(V) = \mathbb{F}_p\,[t_1, t_2, \ldots, t_n] \quad , \deg t_i = 2, \; i = 1, \ldots, n$$

Direm $P(V)^G$ a l'àlgebra d'invariants per aquesta acció:

$$P(V)^G = \left\{ x \in P(V) : gx = x \text{ si } g \in G \right\}$$

Observem que $P(V) = \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n]$, $\deg t_i = 2$, és una àlgebra isomorfa a la cohomologia mod p de l'espai $\mathbb{C}P^\infty \times \overset{(n}{\ldots} \times \mathbb{C}P^\infty$ i, com a tal, admet una acció inestable de l'àlgebra de Steenrod, que, a més queda determinada per la condició d'inestabilitat.

És més, aquesta acció de l'àlgebra de Steenrod commuta amb l'acció del grup G i per tant $P(V)^G$ hereda una acció inestable de $\mathcal{A}_p^*$:

TEOREMA 1.1

Sigui G un grup finit i $\rho: G \longrightarrow GL_n(\mathbb{F}_p)$ una representació fidel. Si $V = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{F}_p \cdot t_i$, deg $t_i = 2$, $i = 1, \ldots, n$ és l'espai de representació, l'àlgebra simètrica:

$$P(V) = \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n], \text{ deg } t_i = 2, \ i = 1,2, \ldots, n$$

admet una única acció inestable de l'àlgebra de Steenrod, la qual indueix sobre l'àlgebra d'invariants, $P(V)^G$, una estructura d'àlgebra inestable sobre l'àlgebra de Steenrod. □

Així doncs, la teoria d'invariants haurà de donar nombrosos exemples d'àlgebres inestables sobre l'àlgebra de Steenrod. Abans de considerar el problema de classificació d'aquests exemples donarem alguns resultats bàsics.

Considerarem la categoria, $\mathcal{C}$, que té per objectes les àlgebres $\mathbb{Z}$-graduades, B^*, sobre un cos commutatiu fixat, que siguin domini d'integritat i nul·les en graus senars. Direm simplement àlgebres a aquests objectes. Els morfismes seran de grau zero.

Són exemples d'àlgebres $P(V)$ i $P(V)^G$, definits abans. També formen una àlgebra els polinomis sobre una àlgebra, B^*, en una variable independent (o més) X, si assignem a X un grau parell 2d. Denotem $B^*[X]_{2d}$ aquesta àlgebra.

En l'estudi dels invariants podem aplicar la teoria de Galois a través dels cossos de fraccions de les àlgebres. Ara bé, el cos de fraccions, K, d'una àlgebra B^* no és un objecte graduat.

Amb l'objecte de no perdre la graduació podem considerar el subanell de K:

$$F^*(B^*) = \left\{\frac{a}{b} \in K : a, b \text{ elements homogenis de } B^*\right\}$$

i assignar el grau: deg $(\frac{a}{b})$ = deg(a)-deg(b). $F^*(B^*)$ s'anomena cos graduat de fraccions de B^* i és un objecte de la subcategoria plena de $\mathcal{C}$ formada pels cossos graduats, és a dir, àlgebres tals que cada element homogeni és invertible.

Amb aquesta subcategoria podem construir una teoria d'extensions algèbriques semblant a la teoria clàssica de cossos. Allò que cal fer és "homogeneïtzar" les definicions per tal de respectar el grau i seguir les demostracions, per exemple, de [18]. Així, si K^* és un cos graduat i L^*

una extensió, direm que un element homogeni, $\omega \epsilon L^{2d}$, és algèbric si és arrel d'un polinomi homogeni de $K^*[X^-]_{2d}$. L^* és una extensió algebraica de K^* si tot element homogeni de L^* és algèbric sobre K^*.

Podem demostrar l'existència i unicitat, llevat d'isomorfisme, de la clausura algèbrica d'un cos graduat K^*, i tenim les nocions habituals d'extensions normals i de separabilitat i per tant d'extensions de Galois, amb la particularitat que ara el grup de Galois d'una extensió és un grup d'automorfismes de grau zero. Així, en el cas d'un grup de Galois actuant sobre $F^*(P(V))$, l'acció queda determinada per la seva restricció a $P(V)$. Si podem demostrar que l'acció deixa estable $P(V)$, com que els automorfismes són de grau zero haurem obtingut que el grup deixa estable V, és a dir, tindrem una representació fidel del grup sobre $GL(V)$ que determinarà completament l'acció sobre $F^*(P(V))$. Tenim en particular:

TEOREMA 1.2 (Teorema d'Artin per a cossos graduats)

Sigui L^* un cos graduat i G un subgrup finit del grup dels automorfismes de L^* (de grau zero).

Si $K^* = (L^*)^G$ és el subcòs invariant per G, aleshores L^* és extensió de Galois de K^* amb grup de Galois G i $[L^*:K^*] = \text{Card}\,(G)$. □

TEOREMA 1.3 (Teorema fonamental de la teoria de Galois per a cossos graduats).

Sigui $K^* \subset L^*$ una extensió finita de Galois amb grup de Galois G. Si F^* és un cos graduat intermedi, L^* és extensió de Galois de F^*, i es pot establir la bijecció:

$$\{F^*: K^* \subseteq F^* \subseteq L^*\} \longrightarrow \{H: H \text{ subgrup de } G\}$$
$$F^* \longrightarrow \text{Gal}\,(L^*/F^*)$$

A més a més, F^* és extensió de Galois de K^* si i només si $H = \text{Gal}\,(L^*/F^*)$ és subgrup normal de G, i en aquest cas:
$\text{Gal}\,(F^*/K^*) \cong G/H$. □

Cal que remarquem que no tots els resultats clàssics sobre la teoria de cossos es generalitzen bé al cas graduat. Aquest és el cas del teorema de l'element primitiu. Suposem que K^* és un cos graduat; els elements homogenis de grau zero de K^* formen un cos, K^0 (i de fet K^* és una extensió de K^0 de la forma $K^0[Z,Z^{-1}]$ on Z és una variable independent de grau positiu). Aleshores, en cas que K^0 sigui un cos finit, donada una extensió, L^*, finita i separable de K^*, no sempre podem trobar un element homogeni $\alpha \in L^*$ amb $K^*(\alpha) = L^*$.

Per exemple, si $K^* = \mathbb{F}_5 [x,x^{-1}]$, on x és una variable independent de grau 48, i $L^* = \mathbb{F}_5 (\sqrt{2}) [y,y^{-1}]$, on y és una variable de grau 2 que satisfà: $y^{24} = x$, tenim que $L^* = K^*(\sqrt{2},y)$ és una extensió separable de K^* de grau $[L^*:K^*] = [L^*:K^* (\sqrt{2})] [K^* (\sqrt{2}) : K^*] = 24 \cdot 2 = 48$. No obstant això, resulta fàcil de veure que si $\alpha \in L^*$ és homogeni, $\alpha^{24} \in K^*$ i per tant $[K^*(\alpha) : K^*] \leqslant 24$ i $K^*(\alpha) \neq L^*$.

Si K^0 és infinit, es compleix el teorema de l'element primitiu.

Després de la nostra excursió a través dels cossos graduats tornem a les àlgebres d'invariants.

Sigui G un grup finit que actua sobre l'àlgebra simètrica de V, P(V), via certa representació $G \longrightarrow GL(V)$. Si x_0 és un element homogeni de grau 2k de P(V), la seva òrbita és un conjunt finit d'elements homogenis de grau 2k, $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$. Aleshores x_0 és arrel del polinomi:

$$g(X) = \prod_{i=0}^{m} (X - x_i) \in P(V)^G [X]_{2k}$$

i obtenim:

Proposició 1.4

$P(V)$ és una extensió entera de $P(V)^G$. □

Com que $P(V) = P(V)^G (t_1, \ldots, t_n)$, on $t_1, \ldots, t_n$ $\mathbb{F}_p$-base de V, l'extensió és finita i P(V) resulta un $P(V)^G$-mòdul graduat de tipus finit i $P(V)^G$ una $\mathbb{F}_p$-àlgebra de tipus finit amb el mateix grau de transcendència que P(V).

Considerem ara els cossos graduats de fraccions de P(V) i $P(V)^G$: $F^*(P(V))$ i $F^*(P(V)^G)$ respectivament. Els elements de $F^*(P(V))$ poden ésser escrits $\frac{a}{s}$ amb $s \in P(V)^G$ i aleshores podem demostrar que l'aplicació $\varphi(\frac{a}{s} \otimes x) = \frac{ax}{s}$ dóna un isomorfisme de $F^*(P(V)^G)$-mòduls graduats lliures (tot mòdul graduat sobre un cos graduat és lliure) $F^*(P(V)) \cong F^*(P(V)^G) \otimes_{P(V)^G} P(V)$ i aleshores:

$[F^*(P(V)):F^*(P(V)^G)] = \mathrm{rang}_{P(V)^G} P(V) < \infty$.

Ara bé, l'acció de G sobre P(V) s'estén de manera òbvia al cos graduat de fraccions i $F^*(P(V))^G = F^*(P(V)^G)$. Pel Teorema d'Artin $[F^*(P(V)):F^*(P(V)^G)] = [F^*(P(V)):F^*(P(V))^G] = \mathrm{Card}\,(G)$.

D'altra banda, si l'àlgebra d'invariants és una àlgebre de polinomis, i, e. $P(V)^G = \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$ amb $x_1, \ldots, x_n$ polinomis homogenis en les variables $t_1, \ldots, t_n$, algèbricament independents, mitjançant les sèries de Poincaré de les àlgebres graduades pot ésser demostrat ([2]-corr) $\mathrm{rang}_{P(V)^G} P(V) = d_1 d_2 \cdots d_n$ si $2d_i = \deg(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Proposició 1.5

Sigui G un subgrup de GL(V), V $\mathbb{F}_p$-espai vectorial de dimensió n.

i) $\mathrm{rang}_{P(V)^G} P(V) = \mathrm{Card}(G)$

ii) Si $P(V)^G = \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$, $\deg x_i = 2d_i$

$$\mathrm{Card}(G) = d_1 d_2 \ldots d_n$$ □

Nosaltres estem interessats en les àlgebres de polinomis sobre $\mathbb{F}_p$ que admeten operacions de Steenrod i per tant, amb l'objecte de classificar les que podem obtenir mitjançant la teoria d'invariants, allò que cal fer és caracteritzar els grups, G, pels quals $P(V)^G$ és una àlgebra de polinomis.

Hi distingirem dos casos:

1) Cas no modular: $\mathrm{Card}(G) \not\equiv 0 \pmod p$

2) Cas modular : $\mathrm{Card}(G) \equiv 0 \pmod p$

Direm també que una àlgebra de polinomis $\mathbb{F}_p[Y_1, \ldots, Y_n]$, $\deg Y_i = 2d_i$, $i = 1, \ldots, n$ és modular si $d_1 \ldots d_n \equiv 0 \pmod p$, i no modular si p no divideix cap d_i.

No disposem encara d'una caracterització adequada dels grups modulars amb àlgebra d'invariants polinòmica. Quant al cas no modular, aquesta caracterització pot trobar-se a [11] ch V.

Definició: Direm que un automorfisme $f: V \longrightarrow V$, on V és un espai vectorial de dimensió finita sobre un cos de característica diferent de dos, és una pseudo-reflexió si $\mathrm{rang}(1-f) = 1$.

TEOREMA 1.6

Sigui V un espai vectorial de dimensió finita sobre un cos K de característica $\neq 2$, i G un subgrup de GL(V) amb Card(G) invertible a K. Aleshores, $P(V)^G$ és una àlgebra de polinomis si i només si G és generat per pseudo-reflexions. □

La llista de Clark-Ewing

Gràcies al teorema 1.6 fou possible d'obtenir una llista completa de les àlgebres de polinomis no modulars amb una acció inestable de l'àlgebra de Steenrod que poden aparèixer com a àlgebres d'invariants.

Definició: Donada una àlgebra de polinomis $\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$,

$\deg x_i = 2d_i$, direm tipus d'aquesta àlgebra al conjunt dels graus dels seus generadors: $(2d_1, \ldots, 2d_n)$.

Observem que el tipus d'una àlgebra de polinomis determina la seva classe d'isomorfisme a la categoria de les àlgebres, però representants d'aquest tipus podem admetre diferents accions de l'àlgebra de Steenrod.

Definició: Una representació $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ direm que és hiperplana si $\mathrm{Im}\rho$ és generat per pseudo-reflexions de $GL(V)$.

Dos subgrups conjugats de $GL(V)$ donen lloc a àlgebres d'invariants isomorfes com a àlgebres inestables sobre l'àlgebra de Steenrod.

Això vol dir que per a classificar els exemples d'àlgebres de polinomis no modulars inestables sobre $\mathcal{A}_p^*$ n'hi ha prou amb trobar les classes d'equivalència de representacions fidels hiperplanes sobre $\mathbb{F}_p$.

Ara bé, resulta equivalent donar aquesta classificació sobre $\mathbb{F}_p$ que sobre el cos p-àdic, $\mathbb{Q}_p$. En efecte, en primer lloc, el fet que $\mathrm{card}(G) \neq 0 \pmod p$ ens permet de pujar una representació $G \rightarrowtail GL_n(\mathbb{F}_p)$ inductivament a representacions $G \rightarrowtail GL_n(Z/p^r)$ i finalment a $GL_n(\hat{Z}_p)$, $\hat{Z}_p$ anell dels enters p-àdics, de manera que si reduïm mod p tornem a la representació original. Així obtenim una correspondència entre representacions fidels sobre $\mathbb{F}_p$ i sobre $\mathbb{Q}_p$. Aleshores:

TEOREMA 1.7

Aquesta correspondència és una bijecció a nivell de classes d'equivalència de representacions.

A més a més, envia representacions hiperplanes a representacions hiperplanes i conserva el tipus dels invariants.

Esquema de la demostració:

La primera part del teorema és conseqüència de [14], 73.6 i 76.17.

Quant a la segona part, si tenim una representació hiperplana sobre $\mathbb{F}_p$, $G \longrightarrow GL(\overline{V})$, aquesta dóna lloc a una àlgebra d'invariants polinòmica de cert tipus $(2d_1, \ldots, 2d_n)$. Pugem aquesta representació a $\hat{Z}_p$: $G \longrightarrow GL(V)$ i obtenim una àlgebra d'invariants $P(V)^G$ que satisfà $P(V)^G \otimes \mathbb{F}_p \cong P(\overline{V})^G$.

Ara hom pot demostrar que $P(V)^G$ és polinòmica generada per elements que es projecten sobre els generadors de $P(\overline{V})^G$. Només ens falta estendre els coeficients de $P(V)$ a $\mathbb{Q}_p$ per a obtenir que la representació sobre $\mathbb{Q}_p$ de G dóna una àlgebra d'invariants polinòmica de tipus $(2d_1, \ldots, 2d_n)$. Segons el teorema 1.7, aquesta serà una representació hiperplana.

Recíprocament, la reducció mod p d'una pseudo-reflexió és una pseudo-reflexió (o bé, la identitat) de manera que la reducció mod p d'una representació p-àdica hiperplana és hiperplana. □

La classificació completa dels tipus d'invariants que donen els subgrups finits no modulars de $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ generats per pseudo-reflexions fou obtinguda per Clark-Ewing[13], a partir de la classificació de Shephard-Todd dels subgrups finits irreduïbles de $GL_n(\mathbb{C})$ generats per pseudo-reflexions[25].

Clark-Ewing demostren que donada una representació hiperplana sobre $\mathbb{Q}_p$ hi ha una representació hiperplana cobre $\mathbb{C}$ amb el mateix caràcter i el mateix tipus d'invariants. Recíprocament, una $\mathbb{C}$-representació irreduïble hiperplana pot ésser realitzada a $\mathbb{Q}_p$ si i només si $\mathbb{Q}_p$ conté un subcòs isomorf a $\mathbb{Q}(\chi)$, on χ és el caràcter de la representació.

Aleshores, per a cada element en la llista de Shephard-Todd calcularen els primers per als quals hom té $\mathbb{Q}_p \supset \mathbb{Q}(\chi)$, obtenint, així, l'anomenada llista de Clark-Ewing, dels tipus d'invariants que donen aquests grups: (Veure pàg. següent).

A més a més demostrarem que qualsevol altre subgrup finit de $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ no modular, generat per pseudo-reflexions és producte directe dels irreduïbles i per tant el tipus dels invariants, producte de tipus irreduïbles de la llista. Òbviament aquest producte ha d'ésser interpretat com a producte tensorial d'àlgebres que representen els tipus de manera que un producte de tipus és la unió dels elements.

TEOREMA 1.8

Els tipus $(2d_1, \ldots, 2d_n)$ de les àlgebres de polinomis no modulars sobre l'àlgebra de Steenrod que poden aparèixer com a àlgebres d'invariants són productes dels tipus que apareixen a la llista de Clark-Ewing. □

El teorema d'Adams-Wilkerson

La llista de Clark-Ewing proporciona una àmplia gamma d'exemples d'àlgebres de polinomis no modulars amb estructura de $\mathcal{A}_p^*$-àlgebres inestables.

En el mateix treball on donen aquesta llista, [13], Clark-Ewing ja

Número	Tipus	Primers
1	(4,6, . . . ,2(n+1))	p≠ (n+)!
2a*	(2m,4m, . . . ,2(n-1)m,2qn)	p≠ n!,p≡1(m)
2b	(4,2m)	m > 2,p≡±1 (m)
3	(2m)	p≡1 (m)
4	(8,12)	p≡1 (3)
5	(12,24)	p≡1 (3)
6	(8,24)	p≡1 (12)
7	(24,24)	p≡1 (12)
8	(16,24)	p≡1 (4)
9	(16,48)	p≡1 (8)
10	(24,48)	p≡1 (12)
11	(48,48)	p≡1 (24)
12	(12,16)	p≡1,3 (8), p≠3
13	(16,24)	p≡1 (8)
14	(12,48)	p≡1,19 (24)
15	(24,48)	p≡1 (24)
16	(40,60)	p≡1 (5)
17	(40,120)	p≡1 (20)
18	(60,120)	p≡1 (15)
19	(120,120)	p≡1 (60)
20	(24,60)	p≡1,4 (15)
21	(24,120)	p≡1,49 (60)
22	(24,40)	p≡1,9 (20)
23	(4,12,20)	p≡1,4 (5)
24	(8,12,28)	p≡1,2,4 (7)
25	(12,18,24)	p≡1 (3)
26	(12,24,36)	p≡1 (3)
27	(12,24,60)	p≡1,4 (15)
28	(4,12,16,24)	p≠2 o 3
29	(8,16,24,40)	p≡1 (4), p≠5
30	(4,24,40,60)	p≡1,4 (5)
31	(16,24,40,48)	p≡1 (4), p≠5
32	(24,36,48,60)	p≡1 (3)
33	(8,12,20,24,36)	p≡1 (3)
34	(12,24,36,48,60,84)	p≡1 (3) p≠7
35	(4,10,12,16,18,24)	p≠2,3,5
36	(4,12,16,20,24,28,36)	p≠2,3,5,7
37	(4,16,24,28,36,40,48,60)	p≠2,3,5,7

* $m > 1$ i $m = qr$

conjecturen la possibilitat que aquests siguin tots els exemples possibles en el cas no modular. Això és el que van demostrar Adams-Wilkerson en un article publicat l'any 1980[2].

Adams-Wilkerson demostren, en primer lloc, que una àlgebra, H^*, sobre l'àlgebra de Steenrod admet una immersió de $\mathcal{A}_p^*$-àlgebres:

$$H^* \longrightarrow \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n], \deg t_i = 2, n \geq 1$$

si i només si és inestable sobre $\mathcal{A}_p^*$ i té grau de transcendència finit. Després determinen els casos en els quals aquesta és una extensió de Galois:

TEOREMA 1.9 (Adams-Wilkerson)

A) Si H^* es una àlgebra amb una acció inestable de l'àlgebra de Steenrod, existeix un grup $W \subset GL_n(\mathbb{F}_p)$ i un isomorfisme de $\mathcal{A}_p^*$-àlgebres

$$H^* \cong \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n]^W, \deg t_i = 2$$

si i només si:

1) H^* és noetherià

2) H^* és íntegrament tancat al seu cos graduat de fraccions.

3) H^* satisfà la "Q-condició": "si $y \epsilon H^{2dp}$ i $Q^r(y) = 0$ per a cada $r \geq 1$, aleshores $y = x^p$ per a un cert $x \epsilon H^{2d}$".

B) Si $H^* = \mathbb{F}_p[Z_1, \ldots, Z_n]$ $\deg z_i = 2d_i$, $d_1 \ldots d_n \not\equiv 0 \pmod p$ és una àlgebra de polinomis no modular amb una acció inestable de l'àlgebra de Steenrod, aleshores hi ha un grup $W \subset GL_n(\mathbb{F}_p)$ i un isomorfisme de $\mathcal{A}_p^*$-àlgebres:

$$H^* \cong \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n]^W, \deg t_i = 2$$

(i.e.,H^* satisfà la Q-condició) □

Amb aquest resultat, podem assegurar que el tipus de qualsevol àlgebra de polinomis no modular amb una acció inestable de l'àlgebra de Steenrod és producte dels tipus irreduïbles de la llista de Clark-Ewing. Recíprocament, cada tipus de la llista admet una única acció inestable induïda per l'acció sobre $\mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n]$ i el grup corresponent. Ara bé, es pot donar el cas que un mateix tipus el tinguem a la llista més d'una vegada, és a dir, procedent de diferents grups. En aquest cas, també els resultats d'Adams-Wilkerson continguts a [2] ens asseguren que aquest tipus admet una acció de $\mathcal{A}_p^*$ diferent per cada vegada que surt a la llista.

En el cas modular és possible d'obtenir exemples d'àlgebres de polinomis inestables sobre $\mathcal{A}_p^*$ que no són àlgebres d'invariants, i.e., que no satisfan la Q-condició. Vegeu [5].

2. L'ÀLGEBRA DE DICKSON

L'àlgebra de Dickson és l'àlgebra d'invariants per l'acció de la totalitat del grup lineal, GL(V), d'un espai vectorial de dimensió finita sobre $\mathbb{F}_p$.

La seva estructura fou determinada per L. E. Dickson al començament d'aquest segle[16].

TEOREMA 2.1. (L.E. Dickson)

Sigui V un $\mathbb{F}_p$-espai vectorial amb base $\{ t_1, \ldots, t_n \}$ i assignem el grau 2 als seus elements.

Aleshores, l'àlgebra de Dickson és una àlgebra de polinomis en n variables independents:

$$D(n) := P(V)^{GL(V)} = \mathbb{F}_p[Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,n}];\ \deg Y_{n,j} = 2(p^n - p^{n-j})$$

on $Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,n}$ són polinomis en $t_1, \ldots, t_n$ que satisfan l'equació:

$$f_n(\bar{X}) := \prod_{v \in V} (\bar{X} - v) = \bar{X}^{p^n} + Y_{n,1}\, \bar{X}^{p^{n-1}} + \ldots + Y_{n,n} \bar{X} \qquad \square$$

Podem trobar una demostració al treball original de Dickson ([16]) i també a [28] i a [37].

A [28] Smith i Switzer utilitzen l'estructura de P(V) d'àlgebra inestable sobre l'àlgebra de Steenrod per a deduir la igualtat:

$$\prod_{v \in V} (\bar{X} - v) = \bar{X}^{p^n} + Y_{n,1}\, \bar{X}^{p^{n-1}} + \ldots + Y_{n,n}\, \bar{X}$$

i obtenen com a corol·lari immediat l'acció de les derivacions $Q^1, \ldots, Q^n$ sobre els generadors de l'àlgebra de Dickson:

Corol·lari 2.2.

$$1 \leqslant i, j \leqslant n, \qquad Q^i(Y_{n,j}) = \begin{cases} -Y_{n,n} & , i+j=n \\ Y_{n,j} \cdot Y_{n,n} & , i=n \\ 0 & , \text{altrament} \end{cases} \qquad \square$$

I com a conseqüència determinen exactament l'acció de l'àlgebra de Steenrod sobre D(n):

Proposició 2.3

$$\mathcal{P}^{p^j}(Y_{n,k}) = \begin{cases} -Y_{n,k+1} & , j+k=n-1 \\ Y_{n,1}\cdot Y_{n,k} & , j=n-1 \\ 0 & , \text{altrament} \end{cases} \qquad \square$$

D'altra banda, Wilkerson, a [37], seguint la idea original de Dickson, considera el polinomi:

$$\Delta_n(X) = \det\begin{pmatrix} t_1 \ldots t_n\, X \\ t_1^p \ldots t_n^p\, X^p \\ \ldots\ldots\ldots \\ t_1^{p^n} \ldots t_n^{p^n} X^{p^n} \end{pmatrix}$$

És fàcil de veure que $f_n(X)$ divideix $\Delta_n(X)$ i aleshores demostrar que $\Delta_n(X) = \Delta_{n-1}(t_n)\, f_n(X)$ amb $\Delta_{n-1}(t_n) \neq 0$. D'aquesta manera tenim l'avantatge de poder calcular explícitament els coeficients de $\Delta_n(X)$, desenvolupant el determinant per la darrera columna, i aleshores calcular els $Y_{n,j}$.

3. ALTRES ÀLGEBRES D'INVARIANTS QUE SÓN ÀLGEBRES DE POLINOMIS MODULARS

L'àlgebra de Dickson, considerada al capítol anterior, és l'exemple més immediat d'àlgebra d'invariants que és àlgebra de polinomis modular.

Altres exemples coneguts són els invariants pels grups simètrics, Σ_n, especial lineal, SL_n, i el grup de les matrius triangulars superiors amb uns a la diagonal, Up(n) [23], [37].

En aquest capítol trobarem l'estructura de les àlgebres d'invariants per l'acció de dues famílies de subgrups del grup lineal $GL_n(\mathbb{F}_p)$, $p \geqslant 3$, que contenen els grups GL_n, SL_n i Up(n):

1) La primera d'elles es compon del grups:

$$SL_n^r := \left\{ \omega \in GL_n : (\det \omega)^r = 1 \right\}$$

per a cada r divisor de p-1.

Fixem-nos que $SL_n^1 = SL_n$ i $SL_n^{p-1} = GL_n$.

2) La segona és formada pels grups:

$$G(r_1, \ldots, r_n) := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in GL_n : \lambda_1^{r_1} = \ldots = \lambda_n^{r_n} = 1 \right\}$$

on $r_1, \ldots, r_n$ són divisors de p-1.

En aquest cas $G(1, \ldots, 1) = Up(n)$, mentre que $G(p\text{-}1, \ldots, p\text{-}1)$ és el grup de Borel, de les matrius triangulars superiors.

Allò que farem en primer lloc és donar una generalització dels mètodes seguits a [28] i [37] per a l'obtenció de l'estructura de l'àlgebra de Dickson que pugui ésser aplicada a altres grups continguts en el grup lineal GL(V).

Lema 3.1

Donat un subgrup, W, de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ i $z_1, \ldots, z_n$ n polinomis homogenis de P(V) de graus $2d_1, \ldots, 2d_n$ que generen una subàlgebra, R^*, que conté l'àlgebra de Dickson, són equivalents:

i) $R^* = \mathbb{F}_p[z_1, \ldots, z_n] = P(V)^W$

ii) $\omega \epsilon GL_n(\mathbb{F}_p)$ deixa invariants $z_1, \ldots, z_n$ sí i només si $\omega \epsilon W$

iii) $z_1, \ldots, z_n$ són invariants per W i $d_1 d_2 \cdots d_n = \mathrm{Card}(W)$.

Demostració:

Com que $D(n) \leqslant R^*$, $z_1, \ldots, z_n$ són algèbricament independents i $R^* = \mathbb{F}_p[z_1, \ldots, z_n]$ és una àlgebra de polinomis. A més, $f_n(X) \epsilon F^*(D(n))[X]_2 \subseteq F^*(R^*)[X]_2$, on $F^*(D(n))$ i $F^*(R^*)$ són els respectius cossos graduats de fraccions. Ara bé, $f_n(X)$ és separable i les seves arrels formen V de manera que $F^*(P(V))$ és el cos graduat de descomposició de $f_n(X)$ sobre $F^*(R^*)$ i $F^*(P(V))$ és extensió de Galois de $F^*(R^*)$. Sigui $\widetilde{W}$, el grup de Galois associat: $F^*(R^*) = F^*(P(V))^{\widetilde{W}}$.

També utilitzant el polinomi $f_n(X) \epsilon R^*[X]_2$ hom obté que $P(V) = R^*(t_1, \ldots, t_n)$ és una extensió entera de R^*. Aleshores, com que $\widetilde{W}$ deixa invariant R^* i P(V) és integrament tancat, l'acció de $\widetilde{W}$ sobre $F^*(P(V)$ deixa estable P(V) i per tant:

$$F^*(R) = F^*(P(V))^{\widetilde{W}} = F^*(P(V)^{\widetilde{W}}) \text{ amb } \widetilde{W} \leqslant GL(V)$$

Ara bé, tot element de R^* és de P(V) i invariant per $\widetilde{W}$ i.e. $R^* \subseteq P(V)^{\widetilde{W}}$ i recíprocament, si $x \epsilon P(V)$, x és enter sobre R^* i si a més és invariant per $\widetilde{W}$, $x \epsilon F^*(R^*)$. Com que R^* és àlgebra de polinomis, és íntegrament tancat i tenim $x \epsilon R^*$, i.e. $R^* = P(V)^W$.

Finalment és immediat de comprovar que (i), (ii) i (iii) són condicions equivalents a la igualtat $W = \widetilde{W}$. □

Àlgebra d'invariants per l'acció del grup SL_n^r.

En el capítol anterior havíem donat el mètode amb el qual podem calcular els generadors de l'àlgebra de Dickson, $Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,n}$. En particular, de la igualtat $\Delta_{n-1}(t_n) f_n(X) = \Delta_n(X)$ es desprèn:

$$\Delta_{n-1}(t_n)\, Y_{n,n} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} t_1^p & \cdots & t_n^p \\ \vdots & & \vdots \\ t_1^{p^n} & \cdots & t_n^{p^n} \end{pmatrix} = (-1)^n \Delta_{n-1}(t_n)^p$$

ja que estem en característica p.

$$\text{Direm } Y_{n,o} = \Delta_{n-1}(t_n) = \det \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_n \\ \vdots & & \vdots \\ t_1^{p^{n-1}} & \cdots & t_n^{p^{n-1}} \end{pmatrix}$$

de manera que $Y_{n,n} = (-1)^n\, Y_{n,o}^{p-1}$.

Proposició 3.2.

L'àlgebra d'invariants per l'acció del grup SL_n^r sobre $P(V)$ es l'àlgebra de polinomis:

$$P(V)^{SL_n^r} = \mathbb{F}_p[Y_{n,o}^r, Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,n-1}]$$

on $Y_{n,o}, Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,n-1}$, són polinomis de $P(V)$ de graus:

$$\deg Y_{n,o}^r = 2r\,\frac{p^{n-1}}{p-1} \quad \text{i} \deg Y_{n,j} = 2(p^n - p^{n-j}),\ 1 \leqslant j \leqslant n-1$$

Demostració:

Com que r divideix p-1, $Y_{n,n} = (-1)^n (Y_{n,o}^r)^{\frac{p-1}{r}}$ de manera que l'àlgebra engendrada per $\{Y_{n,o}^r, \ldots, Y_{n,n-1}\}$ conté l'àlgebra de Dickson.

D'altra banda $Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,n-1}$ són invariants per a $GL_n(V)$ i per tant ho són per a SL_n^r. Ara bé, si $\omega \in GL_n$.

$$\omega(Y_{n,o}) = \det(\omega)\, Y_{n,o}$$

és a dir:

$$\omega(Y_{n,o}^r) = \det(\omega)^r\, Y_{n,o}^r$$

per tant, és clar que $\omega \in SL_n^r$ si i només si deixa invariant $Y_{n,o}^r$.

Així, aquesta proposició és conseqüència del lema 3.1. □

Àlgebra d'invariants per l'acció del grup $G(r_1, \ldots, r_n)$

Donat l'espai vectorial V, generat sobre $\mathbb{F}_p$ per les variables independents, $t_1, \ldots, t_n$, direm V_i al subespai generat per $t_1, \ldots, t_i$. Aquesta indueix una inclusió natural de les àlgebres simètriques: $P(V_i) \subseteq P(V)$.

Sigui $f_i(X) = \prod_{v \in V_i} (X - v) \in P(V_i)[X]_2 \subseteq P(V)[X]_2$

$$f_i(X) = X^{p^i} + Y_{i,1} X^{p^{i-1}} + \ldots + Y_{i,i} X, \; 1 \leqslant i \leqslant n$$
$$f_o(X) = X$$

Definim els polinomis u_i ; $i = 1, \ldots, n$ de $P(V)$ com:

$$u_i : = f_{i-1}(t_i); \; \deg u_i = 2p^{i-1}$$

Demostrarem que $u_1^{r_1}, \ldots, u_n^{r_n}$ generen l'àlgebra $P(V)^{G(r_1, \ldots, r_n)}$ com a àlgebra de polinomis.

Obtindrem en primer lloc unes fórmules que relacionen aquests elements i els generadors de l'àlgebra de Dickson, les quals ja eren conegudes per Dickson. Amb aquestes fórmules serà possible posar $Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,n}$ com a combinació algèbrica de $u_1^{p-1}, \ldots, u_n^{p-1}$.

Lema 3.3

$$f_k(X) = f_{k-1}(X)^p - u_k^{p-1} f_{k-1}(X)$$

Demostració:

Tant el polinomi de la dreta com el de l'esquerra són mònics i de grau p^k. N'hi haurà prou amb demostrar que tenen les mateixes arrels, ja que $f_k(X)$ és separable.

El conjunt d'arrels de $f_k(X)$ és el subespai V_k.

Donat un vector $v \in V_{k-1}$, $f_{k-1}(v) = 0$ i aleshores

$$f_{k-1}(v)^p - u_k^{p-1} f_{k-1}(v) = 0$$

Considerem $v \in V_k \backslash V_{k-1}$, i.e., $v = \lambda t_k + v'$ amb $\lambda \neq 0$ i $v' \in V_{k-1}$. Aleshores: $f_{k-1}(v) = f_{k-1}(\lambda t_k + v') = \lambda f_{k-1}(t_k) + f_{k-1}(v') = \lambda u_k$. Aleshores:

$$f_{k-1}(v)^p - u_k^{p-1} f_{k-1}(v) = (\lambda u_k)^p - u_k^{p-1}(\lambda u_k) = \lambda u_k^p - \lambda u_k^p = 0$$

perquè estem en característica p.

Per tant, cada vector de V_k és arrel de $f_{k-1}(X)^p - u_{k-1} f_{k-1}(X)$ i com que V_k conté p^k vectors, aquests són totes les arrels. □

Corol·lari 3.4 (L.E. Dickson)

i) $Y_{k,1} = (Y_{k-1,1})^p - u_k^{p-1}$

ii) $Y_{k,j} = (Y_{k-1,j})^p - u_k^{p-1} \; Y_{k-1,j-1} \quad ; \; 1 < j < k$

iii) $Y_{k,k} = - u_k^{p-1} \; Y_{k-1,k-1}$

Demostració:

En la igualtat polinòmica del lema anterior només cal igualar els coeficients per a obtenir aquest corol·lari. □

Corol·lari 3.5

$$\text{i) } Y_{n,j} = (-1)^j \sum_{0 \leqslant i_1 < \ldots < i_j \leqslant n} \left(\prod_{k=1}^{j} u_{i_k}^{(p-1)p^{\,n-i_k-j+k}} \right); \; n \geqslant 1, \; 1 \leqslant j \leqslant n$$

En particular:

ii) $Y_{n,1} = -u_1^{(p-1)p^{\,n-1}} - u_2^{(p-1)p^{\,n-2}} - \ldots - u_n^{(p-1)}$

iii) $Y_{n,n} = (-1)^n \, u_1^{p-1} \, u_2^{p-1} \ldots u_n^{p-1}$

Demostració:

Com que $Y_{1,1} = -u_1^{p-1} = -t_1^{p-1}$, (ii) i (iii) es dedueix fàcilment de (i) i (iii) en el corol·lari anterior.

Ja sabem que la fórmula (i) és vàlida si n = 1 o n = 2 (en aquests casos equival a (ii) i (iii)). Aleshores podem procedir per inducció. Si $n > 2$, per a $j = 1$ o $j = n$ ja la tenim demostrada, i si $1 < j < n$ podem utilitzar (ii) del corol·lari anterior per a calcular $Y_{n,j}$ suposant coneguts $Y_{n-1,1}, \ldots, Y_{n-1,n-1}$. □

Proposició 3.6.

L'algebra d'invariants per l'acció del grup $G(r_1, \ldots, r_n)$ és:

$$P(V)^{G(r_1 \ldots r_n)} = \mathbb{F}_p[u_1^{r_1}, \ldots, u_n^{r_n}]$$

on $u_i = f_{i-1}(t_i)$ té grau $2\,p^{i-1}$.

Demostració:

Cada r_i divideix p-1; per tant, del corol·lari 3.5. deduïm que l'àlgebra engendrada per $u_1^{r_1}, \ldots, u_n^{r_n}$ conté l'àlgebra de Dickson.

Un element $\omega \epsilon G(r_1, \ldots, r_n)$ és una matriu triangular

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \ddots & * \\ o & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{amb } \lambda_1^{r_1} = \ldots = \lambda_n^{r_n} = 1$$

per tant $\mathrm{Im}(\omega/_{V_k}) \subseteq V$, és a dir $\omega/_{V_k} \epsilon GL_k(\mathbb{F}_p)$; aleshores ω deixa invariants els coeficients de $f_k(X)$ $0 \leqslant k \leqslant n$ (aquests coeficients són elements de l'àlgebra de Dickson, $D(k)$).

En conseqüència: $\omega(u_k^{r_k}) = \omega(f_{k-1}(t_k))^{r_k} = f_{k-1}(\omega(t_k))^{r_k}$ i com que $\omega(t_k) = \lambda_k t_k + V'$, $V' \epsilon V_{k-1}$, resulta:

$$f_{k-1}(\omega(t_k)) = \lambda_k f_{k-1}(t_k) = \lambda_k u_k$$

i

$$\omega(u_k^{r_k}) = f_{k-1}(\omega(t_k))^{r_k} = \lambda_k^{r_k} u_k^{r_k} = u_k^{r_k}$$

Hem demostrat, doncs, que $u_1^{r_1}, \ldots, u_n^{r_n}$ són invariants per a $G(r_1, \ldots, r_n)$. Només falta comprovar que:

$$\mathrm{Card}\,(G(r_1, \ldots, r_n)) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \deg(u_i^{r_i})$$

Això és immediat. En efecte, $\mathrm{Card}(G(r_1, \ldots, r_n)) = r_1 r_2 \ldots r_n p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ mentre que $\deg u_i^{r_i} = 2r_i p^{i-1}$ de manera que:

$$\prod_{i=1}^{n} \deg(u_i^{r_i}) = r_1 r_2 \ldots r_n p^{(n-1)+\ldots+1} = r_1 r_2 \ldots r_n p^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Aleshores, aquesta proposició és conseqüència del lema 3.1. □

4. ACCIÓ DE L'ÀLGEBRA DE STEENROD SOBRE LES ÀLGEBRES D'INVARIANTS DELS GRUPS SL_n^r I $G(r_1, \ldots, r_n)$

En el capítol 3 hem obtingut l'estructura de l'àlgebra d'invariants per l'acció del grup SL_n^r:

$$P(V)^{SL_n^r} = \mathbb{F}_p[Y_{n,o}^r, Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,n-1}], \deg Y_{n,o}^r = 2r\frac{p^n-1}{p-1}, \deg Y_{n,j} = $$
$$= 2(p^n-p^{n-j})$$

i també per l'acció del grup $G(r_1, \ldots, r_n)$:

$$P(V)^{G(r_1 \ldots r_n)} = \mathbb{F}_p[u_1^{r_1}, \ldots, u_n^{r_n}], \deg u_i^{r_i} = 2r_i p^{i-1}$$

Aquestes són àlgebres de polinomis modulars que admeten una acció inestable de l'àlgebra de Steenrod que és induïda per l'única acció inestable de $\mathcal{A}_p^*$ sobre $P(V) = \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n]$, deg $t_i = 2$.

El capítol present serà dedicat a calcular aquesta acció de $\mathcal{A}_p^*$ sobre les esmentades àlgebres de polinomis.

Considerem en primer lloc l'àlgebra $P(V)^{SL_n^r}$. Començarem per l'acció de les derivacions Q^r, seguint aleshores el mètode aplicat per Smith-Switzer a l'àlgebra de Dickson.

De fet, ja coneixem aquesta acció sobre $Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,n-1}$ (Corol·lari 2.2). Com que:

$$Y_{n,o} = \det \begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_n \\ \vdots & & \vdots \\ t_1^{p^{n-1}} & \ldots & t_n^{p^{n-1}} \end{pmatrix}$$

resulta:

$$Q^i(Y_{n,o}) = \det \begin{pmatrix} Q^i(t_1) & \ldots & Q^i(t_n) \\ t_1^p & \ldots\ldots & t_n^p \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{p^{n-1}} & \ldots & t_n^{p^{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{cases} (-1)^{n-1} Y_{n,o}^p & \text{si } i=n \\ 0 \text{ si } 0 < i < n \end{cases}$$

perquè $Q^i(t_j) = t_j^{p^i}$, la qual cosa se segueix per inestabilitat i la utilització inductiva de les relacions $Q^1 = \mathcal{P}^1$, $Q^i = [\mathcal{P}^{p^{i-1}}, Q^{i-1}]$.

Tenim doncs:

Proposició 4.1

Si $1 \leqslant i \leqslant n$ i $1 \leqslant j \leqslant n-1$:

$$\text{I) } Q^i(Y_{n,o}^r) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ (-1)^{n-1} r\, Y_{n,o}^{p+r-1} & \text{si } i=n \end{cases}$$

$$\text{II) } Q^i(Y_{n,j}) = \begin{cases} (-1)^{n-1} Y_{n,o}^{p-1} & , i+j=n \\ (-1)^n Y_{n,o}^{p-1} Y_{n,j} & , i=n \\ 0 & , \text{altrament} \end{cases}$$ □

Ara podem demostrar la següent proposició que determina l'acció de $\mathcal{A}_p^*$ sobre $P(V)^{SL_n^r}$

Proposició 4.2.

Si $i \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$

$$\text{I)}\quad \mathcal{P}^{p^i}(Y^r_{n,o}) = \begin{cases} -r\, Y_{n,1}\, Y^r_{n,o} & , i=n-1 \\ 0 & , \text{altrament} \end{cases}$$

$$\text{II)}\quad \mathcal{P}^{p^i}(Y_{n,j}) = \begin{cases} Y_{n,j}\, Y_{n,j} & , i=n-1 \\ (-1)^{n-1}\, Y^{p-1}_{n,o} & , i=0,\ j=n-1 \\ -\, Y_{n,j+1} & , i+j=n-1,\ i\geqslant 1 \\ 0 & , \text{altrament} \end{cases}$$

Demostració:

II se segueix de la proposició 2.3.

Demostrarem doncs la fórmula I. Si $i=0$, $\mathcal{P}^1 = Q^1$ i ja hem calculat $Q^1(Y^r_{n,o})$. D'altra banda, si $r=p-1$, estem en el cas de l'àlgebra de Dickson sobre la qual ja coneixem l'acció de $\mathcal{A}^*_p$.

Falta calcular $\mathcal{P}^{p^i}(Y^r_{n,o})$ per a $1 \leqslant i \leqslant n-1$ i $r < p-1$. Com que $r \mid p-1$, tenim $r \leqslant \frac{p-1}{2}$ i és fàcil de veure que:

$$\deg(Y^r_{n,o}) \leqslant \deg(Y^{\frac{p-1}{2}}_{n,o}) < \deg(Y_{n,1}) < \ldots < \deg(Y_{n,n-1}) < \deg(Y^{p-1}_{n,o})$$

i $\deg(\mathcal{P}^{p^i}(Y^r_{n,o})) \leqslant \deg(\mathcal{P}^{p^{n-1}}(Y^r_{n,o})) = \deg(Y_{n,1}\ Y^r_{n,o})$, on la igualtat només es dóna si $i=n-1$.

Ara no es difícil de comprovar que si $i < n-1$, $P(V)^{SL^r_n}$ és zero en el grau de $\mathcal{P}^{p^i}(Y^r_{n,o})$ i per tant:

$$1 < r \leqslant \frac{p-1}{2}\ ,\quad 1 \leqslant i \leqslant n-1\ ,\ \mathcal{P}^{p^i}(Y^r_{n,o}) = \begin{cases} a\, Y_{n,1}\, Y^r_{n,o},\ a \in \mathbb{F}_p & \text{si } i=n-1 \\ 0\ , & \text{si } i<n-1 \end{cases}$$

Aplicant la relació $Q^n = [\ \mathcal{P}^{p^{n-1}}, Q^{n-1}\ ]$ a l'element $Y^r_{n,o}$ i fent servir la proposició 4.1 en els càlculs, hom obté $a = -r$. □

Ara calcularem l'acció de $\mathcal{A}^*_p$ sobre $P(V)^{G(r_1 \ldots r_n)}$. Abans, però, que en general, considerarem el cas particular $r_1 = \ldots = r_n = 1$, és a dir, els invariants per l'acció del grup $Up(n)$.

Proposició 4.3

L'acció de l'àlgebra de Steenrod, $\mathcal{A}^*_p$, sobre $P(V)^{Up(n)} = \mathbb{F}_p[u_1, \ldots, u_n]$ queda determinada per:

$$1 \leqslant m \leqslant n\ ,\ \mathcal{P}^{p^k}(u_m) = \begin{cases} u_m^p & ,\ k=m-1 \\ -\left(u_1^{(p-1)p^{m-2}} + u_2^{(p-1)p^{m-3}} + \ldots + u_{m-1}^{(p-1)}\right)u_m & ,\ k=m-2 \\ 0 & ,\ \text{altrament} \end{cases}$$

Demostració:

La demostració fa servir el resultat següent:

Lema (Wilkerson, [37])

Si X és una variable independent de grau 2, a $P(V)[X]_2$ tenim la igualtat:

$$\mathcal{P}^k f_n(X) = \mathcal{P}^{k-p^{n-1}}(Y_{n,1})\, f_n(X) \quad , \quad 0 < k < p^n$$

on $f_n(X) = \prod_{v \in V} (X - v)$, $\mathcal{P}^j = 0$ si $j < 0$, i l'acció de $\mathcal{A}_p^*$ sobre X queda determinada per inestabilitat. □

Apliquem aquest lema sobre $\mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_{m-1}][X]_2$ i posem $X = t_m$:

$$\mathcal{P}^k f_{m-1}(t_m) = \mathcal{P}^{k-p^{m-2}}(Y_{m-1,1}) f_{m-1}(t_m) \ ,\ 0 < k < p^{m-1}$$

Recordant la definició del u_m ; $\mathcal{P}^k(u_m) = \mathcal{P}^{k-p^{m-2}}(Y_{m-1,1})u_m$ de manera que $\mathcal{P}^k(u_m) = 0$ si $0 < k < p^{m-2}$ i

$$\mathcal{P}^{p^{m-2}}(u_m) = Y_{m-1,1} \cdot u_m$$

que ens dóna el resultat enunciat aplicant el corol·lari 3.5 (ii).

Finalment, $\mathcal{P}^{p^{m-1}}(u_m) = u_m^p$ i $\mathcal{P}^k(u_m) = 0$ si $k > p^{m-1}$ per inestabilitat. □

Calcular l'acció de $\mathcal{A}_p^*$ sobre $P(V)^{G(r_1 \ldots r_n)} = \mathbb{F}_p[u_1^{r_1}, \ldots, u_n^{r_n}]$ un cop que coneixem l'acció sobre $\mathbb{F}_p[u_1, \ldots, u_n]$ és, només, qüestió d'aplicar la fórmula de Cartan i les relacions d'Adem de manera que podem estalviar al lector cinc pàgines de càlculs i donar el resultat final:

Proposició 4.4.

L'acció inestable de $\mathcal{A}_p^*$ sobre $P(V) = \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n]$, deg $t_i = 2$, indueix una acció inestable de $\mathcal{A}_p^*$ sobre

$$P(V)^{G(r_1, \ldots, r_n)} = \mathbb{F}_p[u_1^{r_1}, \ldots, u_n^{r_n}]$$

que queda determinada per:

$$\mathcal{P}^{p^k}(u_m^{r_m}) = \begin{cases} r_m\, u_m^{p-1+r_m} + (r-1)u_m^{r_m} \cdot \sum_{i=1}^{m-1} u_i^{(p-1)p^{m-i}} & , k=m-1 \\ -\, r_m\, u_m^{r_m} \sum_{i=1}^{m-1} u_i^{(p-1)p^{m-i-1}} & , k=m-2 \\ 0 & , k\neq m-1,\ m-2 \end{cases}$$

□

5. REALITZABILITAT

Un cop sabem que una àlgebra de polinomis de tipus $(2d_1, \ldots, 2d_n)$ sobre $\mathbb{F}_p$ admet una acció inestable de l'àlgebra de Steenrod, la pregunta és si definitivament aquesta àlgebra és la cohomologia d'un espai topològic, és a dir, si és realitzable.

La resposta és afirmativa en el cas no-modular, ja que Clark-Ewing construïren espais realitzant els tipus de la seva llista i, segons el teorema d'Adams-Wilkerson, amb aquests n'hi ha prou.

TEOREMA 5.1

Si $\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$, deg $x_i = 2d_i$, és una àlgebra de polinomis no modular sobre l'àlgebra de Steenrod que satisfà les condicions d'inestabilitat:

a) Existeix un grup $G < GL_n(\mathbb{F}_p)$ tal que

$$\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n] \cong \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n]^G$$

i el tipus $(2d_1, \ldots, 2d_n)$ és producte de tipus irreduïbles de la llista de Clark-Ewing.

b) Existeix un espai, $X(G, p, n)$, i un isomorfisme

$$H^*(X(G, p, n), \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$$

d'àlgebres inestables sobre l'àlgebra de Steenrod.

Demostració:

(a) és degut als resultats de Clark-Ewing i Adams-Wilkerson comentats al capítol 1.

(b) Clark-Ewing obtingueren els espais $X(G, p, n)$ de la manera següent. L'espai d'Eilemberg-MacLane $K(\mathbb{Z}^n, 2)$ és simplement connex i té cohomologia $\mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n]$. Aleshores el seu completat p-àdic (Veure [10] ch VI) és un espai d'Eilemberg-MacLane $K(\hat{\mathbb{Z}}_p^n, 2)$ i té cohomologia:

$$H^*(K(\hat{\mathbb{Z}}_p^n,2), R) \cong R[t_1, \ldots, t_n], \deg t_i = 2, R=\mathbb{F}_p, \hat{\mathbb{Z}}_p, \mathbb{Q}_p.$$

El grup $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{F}_p)$ pot ésser pujat a una representació p-àdica $G \rightarrowtail GL_n(\hat{\mathbb{Z}}_p)$ i així obtindrem una acció de G sobre $K(\hat{\mathbb{Z}}_p^n, 2)$ i aleshores un G-fibrat:

$$K(\hat{\mathbb{Z}}_p^n, 2) \to K(\hat{\mathbb{Z}}_p^n, 2) \times_G EG \to BG$$

[9]. Hom defineix $X(G, p, n) = K(\mathbb{Z}_p^n, 2) \times_G EG$ i utilitzant, per exemple, la successió espectral de Serre associada a l'esmentada fibració obtenim la cohomologia de $X(G, p, n)$.

$$H^*(X(G, p, n), R) = R[t_1, \ldots, t_n]^G \cong R[x_1, \ldots, x_n] \qquad \square$$

En el cas modular hom no pot donar una resposta definitiva a hores d'ara. D'una banda els espais classificadors dels grups de Lie proporcionen exemples d'àlgebres de polinomis modulars realitzables. A part d'aquestes, gairebé totes les àlgebres de polinomis modulars sobre l'àlgebra de Steenrod conegudes resulten no realitzables. Això és degut a l'existència d'operacions secundàries de cohomologia i d'ordre superior i d'altres operacions en teories de cohomologia extraordinàries.

Una operació secundària de cohomologia associada a una relació homogènia de grau k de l'àlgebra de Steenrod, $\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = 0$, és una transformació natural:

$$\Phi : H^n(-,\mathbb{F}_p) \cap \left\{ \bigcap_{i=1}^{m} \ker b_i \right\} \longrightarrow H^{n+k-1}(-, \mathbb{F}_p) \Big/ \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} a_i$$

on $\bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} a_i$ és anomenada indeterminació de Φ.

Aquestes operacions foren estudiades en el cas p=2 per Adams[1], que obtingué una factorizació dels quadrats de Steenrod, Sq^{2^K}, per operacions secundàries. El resultat fou generalitzat per Liulevicius[19], a primers senars, i obtingué operacions secundàries a través de les quals factoritzen els elements $\mathcal{P}^{p^k}$ de $\mathcal{A}_p^*$.

Com a aplicació d'aquesta factorització hom pot obtenir que si $\beta = \mathcal{P}^1 = 0$ a $H^*(X, \mathbb{F}_p)$ (p senar), aleshores, $\mathcal{P}^i = 0$, $i > 0$, i com a conseqüència d'això cap espai no pot tenir cohomologia,

$$\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]$$

amb $\deg x_1 =, , ,= \deg x_k = 2$ i $\deg x_{k+1} \equiv, , ,\equiv \deg x_n \equiv 0 \pmod p$ ([5], [26]). En particular, si $H^*(X, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}[x]$, $\deg x = 2n$, aleshores $n = p^i m$; $m | p-1$ (Vegeu cap. 1) i segons el raonament anterior, i=0.

Si k=0, la factorització de Liulevicius és:

$$\mathcal{P}^{p-2}\,\mathcal{R} + \beta\Gamma = \mathcal{P}^{p} \text{ a } \operatorname{Ker}\beta \cap \operatorname{Ker}\mathcal{P}^{1}$$

amb $\mathcal{R}$ de grau $4(p-1)$ associada a la relació $2\mathcal{P}^2\beta + (-2\mathcal{P}^1\beta - \beta\mathcal{P}^1)\mathcal{P}^1 = 0$ i Γ de grau $2p(p-1)-1$ associada a la relació $\mathcal{P}^{p-1}\mathcal{P}^1 = 0$. Una demostració curta d'aquesta fórmula podem trobar-la a [39].

Smith i Switzer aplicaren la factorització de $\mathcal{P}^p$ a les àlgebres de Dickson $D(n)$, $n \geqslant 2$,[28] i el mètode pot ésser repetit sobre la família d'àlgebres $P(V)^{SL_n^r}$, que com sabem conté les àlgebres de Dickson.

Proposició 5.2

Les àlgebres de polinomis sobre l'àlgebra de Steenrod:

$$P(V)^{SL_n^r} = \mathbb{F}_p[Y_{n,o}^r, Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,n-1}];$$

$$\deg Y_{n,o}^r = 2r\,\frac{p^n-1}{p-1},\ \deg Y_{n,j} = 2(p^n - p^{n-j}) \text{ si } j = 1, \ldots, n-1,$$

no son realitzables com a anell de cohomologia d'un espai si $n > 2$.

Demostració:

Per la proposició 4.2 sabem que $\mathcal{P}^1(Y_{n,n-2}) = 0$ i per tant:

$$-Y_{n,n-1} = \mathcal{P}^p(Y_{n,n-2}) = \mathcal{P}^{p-2}\mathcal{R}(Y_{n,n-2}) + \beta\Gamma(Y_{n,n-2})$$

Com que Γ és de grau senar, $\Gamma(Y_{n,n-2}) = 0$. El grau de $\mathcal{R}(Y_{n,n-2})$ estarà entre el de $Y_{n,n-2}$: $2(p^n - p^2)$ i el de $Y_{n,n-1}$, $2(p^n - p)$ i com que $\deg(Y_{n,1} \cdot Y_{n,o}) > \deg Y_{n,n-1}$, l'única possibilitat perquè l'àlgebra que estem considerant fos no nul·la en grau $2(p^n - p^2) + 4(p-1)$ ($= \deg \mathcal{R}(Y_{n,n-2})$) és que fos $2(p^n - p^2) + 4(p-1) = \deg Y_{n,o}^r$ per a un cert k, que òbviament seria més petit que p-1. És a dir, estem demanant que es compleixi la igualtat:

$$p^n - p^2 + 2(p-1) = k\,\frac{p^n-1}{p-1}\ ;\ k < p-1$$

És fàcil de comprovar que això no és possible per a cap primer senar si $n > 2$ i així arribem a una contradicció. □

Una altra possibilitat que tenim per a demostrar la no realitzabilitat d'una àlgebra de polinomis sobre l'àlgebra de Steenrod és mitjançant les operacions d'Adams en teoria K complexa.

La teoria K complexa és una teoria de cohomologia que associa a cada CW-complex finit, X, un anell commutatiu, $K^*(X)$, dotat d'una filtració induïda pels esquelets de X. Una bona referència és el llibre d'Atiyah[6].

En el nostre cas és convenient de considerar la teoria K complexa amb coeficients localitzats a p, i.e.

$$K^*(X, \mathbb{Z}_{(p)}) = K^*(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

on $\mathbb{Z}_{(p)}$ és el subanell de $\mathbb{Q}$ de les fraccions amb denominador coprimer amb p.

Aleshores tenim una successió espectral d'Atiyah-Hirzebruck amb $E_2^n = H^n(X, \mathbb{Z}_{(p)})$ i que convergeix finitament al graduat associat a la filtració de $K^*(X, \mathbb{Z}_{(p)})$. Ara, si l'homologia de X és lliure de p-torsió, aquesta successió espectral col·lapsa.

Les operacions d'Adams, $\{\psi_k\}$ són endomorfismes de K que preserven la filtració i satisfan les propietats:

1) $\psi^q \psi^k = \psi^k \psi^q$

2) $\psi^p(x) = x^p \pmod p$

3) $(\psi^q - q^n)x \in K_{n+1}$ si $x \in K_n$

4) Si $H_*(X, \mathbb{Z})$ no té p-torsió, aleshores, donat $x \in K_n$ existeix $V_i \in K_{n+i(p-1)}$ tal que $\psi^p(x) = \sum_{i=1}^{n} p^{n-i} V_i$. on el subíndex de K designa el grau de filtració. ([7])

En el cas que la cohomologia mod p de X sigui polinòmica, truncada en cert grau, amb generadors de grau parell, l'homologia de X és lliure de p-torsió i pot ésser demostrat que $K^0(X, \mathbb{Z}_{(p)})$ és una àlgebra de polinomis amb generadors del mateix grau i igualment truncada, on ara el grau correspon al grau de filtració. Aleshores podem utilitzar les operacions d'Adams per a obtenir restriccions sobre el grau dels generadors.

Aquest programa el dugué a terme C. Wilkerson[35] amb els esquelets d'un espai amb cohomologia polinòmica, $H^*(X, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$, $\deg x_i = 2d_i$.

TEOREMA 5.3 (C. Wilkerson)

$\mathbb{F}_p[x,y]$, $2 < \deg x < \deg y > 2p$ només pot ésser realitzable si es troba en un dels casos següents:

i) $p \geq 5$, $\deg(y) - \deg(x) = 2(p-1)$, $\deg(x)/4(p-1)$

ii) $p = 3$, $\deg(y) - \deg(x) = 4$, $\deg(x) = 4, 12$

iii) $p = 3$, $\deg(x) = 4$, $\deg(y) = 12$ □

TEOREMA 5.4 (C. Wilkerson)

Si $H^*(X, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$, deg $x_i = 2d_i$, $1 < d_i \leqslant d_{i+1}$ i $d_n > p$, aleshores hi ha un $x_j \neq x_n$ tal que:

$$d_n - d_j = s(p\text{-}1)\ ,\ 1 \leqslant \nu_p(d_n) + 1$$

on $\nu_p(d_n) = \max\ \{k : p^k \mid d_n\}$. □

Podem aplicar aquests resultats en primer lloc a les àlgebres de polinomis en rang 2 : $P(V)^{SL_2^r}$.

Proposició 5.5

$P(V)^{SL_2^r} = \mathbb{F}_p[Y_{2,0}^r\ ,\ Y_{2,1}]$ és la cohomologia d'un espai només en el cas p=3 i r=2.

Demostració:

Si p=3 i r=2, $SL_2^2 = D(2)$ i $P(V)^{D(2)}$ és realitzable com demostrà Zabrodsky[40]. Els altres casos els podem eliminar amb el teorema 5.4. □

Finalment considerem les àlgebres d'invariants per l'acció de $G(r_1, \ldots, r_n)$:

Proposició 5.6

Les àlgebres de polinomis sobre l'àlgebra de Steenrod:

$$n \geqslant 2,\ P(V)^{G(r_1, \ldots, r_n)} = \mathbb{F}_p[u_1^{r_1}, \ldots, u_n^{r_n}],\ \deg u_i^{r_i} = 2r_i\, p^{i-1}$$

no són realitzables, llevat dels casos:

$$H^*(BG_2, \mathbb{F}_3) \cong \mathbb{F}_3[u_1^2, u_2^2]$$

$$H^*(BSU(3), \mathbb{F}_3) \equiv \mathbb{F}_3[u_1^2, u_2]$$

Demostració:

Si $r_1 = 1$, tenim un generador de grau 2 i els altres de grau congruent amb zero mòdul p i ja havíem comentat que aquesta àlgebra no pot ésser realitzable.

Suposem $r_1 > 1$. Si $n \geqslant 3$, podem aplicar el teorema 5.4: hi ha un $k \neq n$ tal que

$$d_n - d_k = s(p\text{-}1)\ ,\ 1 \leqslant \nu_p(d_n) + 1 = n$$

és a dir

$$r_n\, p^{n-1} - r_k\, p^{k-1} = s(p-1) \quad i \quad s \leqslant n.$$

però això no és possible si p i n $\geqslant 3$.

Només resta considerar el cas de rang 2. El teorema 5.3 elimina tots els casos llevat que $p=3$, $r_1 = r_2 = 2$ i $p=3$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, que donen com a resultat les cohomologies mod p de BG_2 i $BSU(3)$ respectivament, i llevat dels casos $P(V)^{G(r_1,1)}$, $r_1 > 1$ i $p > 3$.

J. R. Hubbuck ha demostrat, utilitzant altres operacions en teoria K complexa, que $P(V)^{G(r_1,1)}$, $r_1 > 1$, $p > 3$, no són realitzables (resultat no publicat). □

BIBLIOGRAFIA

1. ADAMS, J. F., "On the non-existence of elements of Hopf invariant one" Annals of Math 72 (1960) 20-104.
2. ADAMS, J. F. – WILKERSON, C. W. "Finite H-spaces and algebras over the Steenrod algebra". Annals of Math. 111 (1980) 95-143, i" –, a correction" Annals of Math. 113 (1981) 621-622.
3. AGUADÉ, J., "Fibracions d'esferes per esferes mòdul p" Publ. Mat. U.A.B. 16 (1979) 3-66. Tesis.
4. AGUADÉ, J. "Realizability of cohomology algebras: a survey" Publ. Mat. U.A.B. 26(2) (1982) 25-68.
5. AGUADÉ, J. "Invariants of modulars representations and polynomial algebras over the Steenrod algebra".
6. ATIYAH, M. "K-Theory" Benjamin, 1967.
7. ATIYAH, M. "Power operations in K-Theory", Quart, J. Math. Oxford Ser. 17 (1966) 165-193.
8. ATIYAH, M. – MACDONALD, I. G. "Introduction to commutative algebra" Addison-Wesley, 1968.
9. BOREL, A. "Topics in the homology theory of fibre bandles". L.N.M. 36. Springer-Verlag 1967.
10. BOUSFIELD, A.K – KAN, R.M. "Homotopy limits, completations and localisations" L.N.M. 304 (1972).
11. BOURBAKI, N. "Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6" Hermann, París 1968.
12. CARTAN, H. – EILENBERG, S. "Homological algebra" Princeton University Press, 1956.
13. CLARK, A. – EWING, J. "The realization of polynomial algebras as cohomology rings" Pac. J. of Math. 50 (1974) 425-434.
14. CURTIS, C.W. – REINER, I. "Representation theory of finite groups and associative algebras" John Wiley & Son, Inc. 1962.
15. CHEVALLEY, C. "Invariants of finite groups generated by reflections" Anner J. Math. 77(1955) 778-782.
16. DICKSON, L. E. "A fundamental sistem of invariants of the general modular

linear group with a solution of the form problem" Trans AMS 12(1911) 75-98.
17. HUBBUCK, J.R. "Generalized cohomology operations and H-spaces of low rang" Trans. Amer. Math. Soc. 141 (1969) 335-360.
18. LANG, S. "Algebra" Addison Wesley, 1965.
19. LIULEVICIUS, A. "The factorization of cyclic reduced powers by secondory cohomology operations". Memoirs Amer Math. Soc. 42 (1962).
20. MACLANE, S. "Homology" Springer-Verlag, 1963.
21. MILNOR, J. "The Steenrod algebra and its dual". Annals of Math. 67 (1958) 150-171.
22. MILNOR, J. MOORE, J.C. "On the structure of Hopf algebras" Annals of Math. 81 (1965) 211-264.
23. MÙI, H. "Modular invariant theory and cohomology algebras of symmetric groups" J. Fac. Sci. U. Tokyo. 22 (1975) 319-369.
24. NAKAJIMA, H. "Modular representation of p-groups with regular rings of invariants" Proc. Japan Acad. 56 (1980) 469-473.
25. SHEPHARD, G.C. – TODD, J. A. "Finite unitary reflection groups" Canad. J. Math. 6 (1954) 274-304.
26. SMITH, L. "The non realizability of modular rings of polynomial invariants by the cohomology of a topological space" Proc. Amer. Math. Soc. 86 (1982) 339-340.
27. SMITH, L. "Polynomial and related algebras as cohomology rings (report on recent progress)" Publ. Mat. U.A.B. 26 (3) (1982) 161-197.
28. SMITH, L, – SWITZER, R.M. "Realizability and non-realizability of Dickson algebras as cohomology rings".
29. SMITH, L. – SWITZER, R.M. "Polynomial algebras over the Steenrod algebra. Variations on a theorem of Adams and Wilkerson".
30. STEENROD, N. E. "The cohomology algebra of a space" L'Enseign. Math. 7 (1961) 153-178.
31. STEENROD, N. E. "Polynomial algebras over the algebra of cohomology operations" H-spaces (Neuchâtel) Springer L.N.M. 196 (1971) 85-99.
32. STEENROD, N. E. – EPSTEIN, D. B. A. "Cohomology operations" Annals of Math. Studies. Princeton 1962.
33. WHITEHEAD, G. W. "Elements of homotopy theory" G.T.M. 61. Springer-Verlag 1978.
34. WILKERSON, C. "Some polynomial algebras over the Steenrod algebra A_p" Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973) 1274-1276.
35. WILKERSON, C. "K-Theory operations in mod p loop spaces" Math. Z 132 (1973) 29-44.
36. WILKERSON, C. "Classifying spaces, Steenrod operations and algebraic closure" Topology 16 (1977) 227-237.
37. WILKERSON, C. "A primer on the Dickson invanriants" Contemporany Math. 19 (1983) 421-434.
38. WILKERSON, C. "Integral closure of unstable Steenrod algebra actions" J J. Pure and Applied Algebra.
39. ZABRODSKY, A. "Hopf Spaces". North-Holland Math. Studies 22, (1976).
40. ZABRODSKY, A. "On the realization of invariant subgroups of $\pi_*(x)$".